第23講　平面ベクトル(2)

1　3点O，A，Bがあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{5}{6}$ が成り立っている．OAの中点をPとし，半直線AB上に $\mathrm{AB}:\mathrm{AH}=1:s\ (s>0)$ となる点Hをとる．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　直線OHと直線ABが垂直に交わるような s の値を求めよ．

(3)　(2)のとき，直線OHと直線PBの交点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【Point Pickup】

ベクトルによる内分点と外分点の表現

点Pが直線AB上にあるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$　つまり　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

「　　　　　」のとき　　　Pは線分ABを内分する点

「　　　　　　　」のとき　Pは線分ABを外分する点

< Note >

2　半径1の外接円をもつ三角形ABCの外心をOとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．$2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2)　辺ABの長さを求めよ．

(3)　三角形ABCの面積を求めよ．

【Point Pickup】

ベクトルの相等と大きさ

$\vec{a}=\vec{b}$ のとき　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　　　$\vec{a}=-\vec{b}$ のとき　$|\vec{a}|=$

つまり，ベクトルの向きは大きさには関係がない．

ベクトルを用いた三角形の面積

三角形OBAの面積 S，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると

$S=$

特に，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき　$S=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

＜ Note ＞

3　三角形ABCを1辺の長さが1の正三角形とする．以下の問いに答えよ．

(1)　実数 s，t が $s+t=1$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす点Pの軌跡Gを正三角形ABCとともに図示せよ．

(2)　実数 s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$1\leqq s+t\leqq 2$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす点Pの存在範囲 D を正三角形ABCとともに図示し，領域 D の面積 S を求めよ．

【Point Pickup】

ベクトルの終点が表す軌跡・領域

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ が1次独立のとき，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$（$s$，$t$ は実数）を満たす点Pは平面ABC上の「　　　　　　」を表す．

s，t に条件をつけると，それに応じて点Pの表す軌跡・領域が決定する．

$s+t=1$ のとき　「　　　　　」

$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ のとき　「　　　　　」

$s+t=k$ のときは，k で「　　　」ことにより，動く直線の描く領域として考えることができる．

< Note >

第23講　平面ベクトル(2)

[1]　1辺の長さが1の正三角形OABにおいて，辺ABを3：1に内分する点をP，辺OBの中点をQとする．直線PQ上の点Sを，OA⊥OSとなるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とすると，点Sは直線PQ上の点より

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}(1-t)\vec{a}+\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}-\frac{t}{\boxed{\text{ア}}}\right)\vec{b}$$ と表される．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\boxed{\text{ウ}}$ より $t=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ となる．このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

[2]　半径1の外接円をもつ三角形ABCの外心をOとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．$\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$ であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である．

＜ Note ＞

第23講　平面ベクトル(2)

1　3点O，A，Bがあり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\cos\angle AOB=\dfrac{5}{6}$ が成り立っている．OAの中点をPとし，半直線AB上にAB：AH＝1：s $(s>0)$ となる点Hをとる．

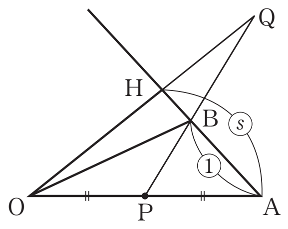
(1)　$\overrightarrow{OH}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　直線OHと直線ABが垂直に交わるような s の値を求めよ．

(3)　(2)のとき，直線OHと直線PBの交点をQとする．$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(1)　AB：AH＝1：s より　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})=\boldsymbol{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=3\times2\times\dfrac{5}{6}=5$



$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OH}$ より　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OH}=0$

$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}=0$

つまり　$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}=0$

$(1-s)|\vec{a}|^2+s\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{b}|^2=0$

$9(1-s)+5s-5(1-s)-4s=0$　　　よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{4}{3}}$

(3)　点Qは直線BP上の点より，t を実数として

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$　とおける．

また，点Qは直線OH上の点より，u を実数として

$$\overrightarrow{OQ}=u\overrightarrow{OH}=u\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}\right)=-\frac{1}{3}u\vec{a}+\frac{4}{3}u\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$　とおける．

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立より，①，②から　$\dfrac{1}{2}(1-t)=-\dfrac{1}{3}u$，$t=\dfrac{4}{3}u$　よって　$t=2$，$u=\dfrac{3}{2}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}}$

(別解)　(2)より HB：BA＝$\dfrac{1}{3}$：1＝1：3

メネラウスの定理より　$\dfrac{OQ}{QH}\cdot\dfrac{HB}{BA}\cdot\dfrac{AP}{PO}=1$

つまり　$\dfrac{OQ}{QH}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1}=1$　より　$\dfrac{OQ}{QH}=\dfrac{3}{1}$

したがって　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{2}a+2\vec{b}$

2　半径1の外接円をもつ三角形ABCの外心をOとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．$2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

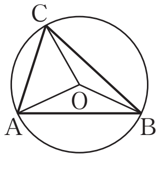
(2)　辺ABの長さを求めよ．

(3)　三角形ABCの面積を求めよ．

(1)　$2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ より　$2\vec{a}+3\vec{b}=-3\vec{c}$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|=|3\vec{c}|$　つまり　$|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=|3\vec{c}|^2$

$4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=9|\vec{c}|^2$　$4+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9=9$　　よって　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{3}}$



$2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ より　$3\vec{b}+3\vec{c}=-2\vec{a}$

$|3\vec{b}+3\vec{c}|=|2\vec{a}|$　つまり　$|3\vec{b}+3\vec{c}|^2=|2\vec{a}|^2$

$9|\vec{b}|^2+18\vec{b}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2=4|\vec{a}|^2$　$9+18\vec{b}\cdot\vec{c}+9=4$　　よって　$\boldsymbol{\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{7}{9}}$

(2)　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1=\frac{8}{3}$

よって　$AB=|\overrightarrow{AB}|=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

(3)　(1)と同様に $\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{3}$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\times1^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\triangle OBC=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\times1^2-\left(-\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{81}}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

$$\triangle OCA=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\times1^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

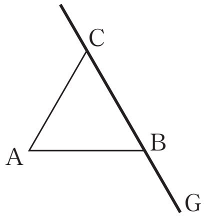
よって　$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{9}+\frac{\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{9}}$

3　三角形ABCを1辺の長さが1の正三角形とする．以下の問いに答えよ．

(1)　実数 s，t が $s+t=1$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす点Pの軌跡Gを正三角形ABCとともに図示せよ．

(2)　実数 s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$1\leqq s+t\leqq 2$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす点Pの存在範囲 D を正三角形ABCとともに図示し，領域 D の面積 S を求めよ．

(1)　点Pの描く軌跡は直線BC．
その軌跡Gは右図．



(2)　$s+t=k$ とおくと，$1\leqq k\leqq 2$

$k\neq 0$ より $\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$，$\dfrac{s}{k}\geqq 0$，$\dfrac{t}{k}\geqq 0$

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=\dfrac{s}{k}(k\overrightarrow{AB})+\dfrac{t}{k}(k\overrightarrow{AC})$

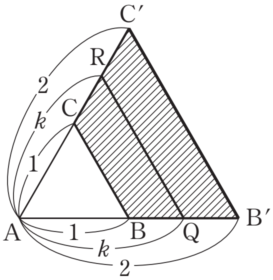
$k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}$，$k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AR}$ とおくと

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{s}{k}\overrightarrow{AQ}+\dfrac{t}{k}\overrightarrow{AR}$　$\left(\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1,\ \dfrac{s}{k}\geqq 0,\ \dfrac{t}{k}\geqq 0\right)$

よって点Pが描く軌跡は線分QR

$1\leqq k\leqq 2$ で k を動かすことにより，Pの存在範囲 D は

右図台形BCC′B′の周および内部 ($\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AC}$)



$\triangle ABC：\triangle AB'C'=1^2：2^2=1：4$ より

$S=3\times\triangle ABC=3\times\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$

第23講　平面ベクトル(2)

［1］ 1辺の長さが1の正三角形OABにおいて，辺ABを3：1に内分する点をP，辺OBの中点をQとする．直線PQ上の点Sを，OA⊥OSとなるようにとる．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とすると，点Sは直線PQ上の点より

$\overrightarrow{OS}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}(1-t)\vec{a}+\left(\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}-\dfrac{t}{\boxed{ア}}\right)\vec{b}$ と表される．

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OS}=\boxed{ウ}$ より $t=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ となる．このとき $|\overrightarrow{OS}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ である．

［2］ 半径1の外接円をもつ三角形ABCの外心をOとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおく．$\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$であり，$\triangle OAB=\dfrac{\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$である．

解答例

［1］ $\overrightarrow{OS}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}=(1-t)\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}\right)+t\cdot\dfrac{1}{2}\vec{b}=\dfrac{1}{\mathbf{4}}(1-t)\vec{a}+\left(\dfrac{\mathbf{3}}{4}-\dfrac{t}{4}\right)\vec{b}$

OA⊥OS より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OS}=\mathbf{0}$

よって　$\vec{a}\cdot\left\{\dfrac{1}{4}(1-t)\vec{a}+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{t}{4}\right)\vec{b}\right\}=0$　　　$\dfrac{1}{4}(1-t)|\vec{a}|^2+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{t}{4}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

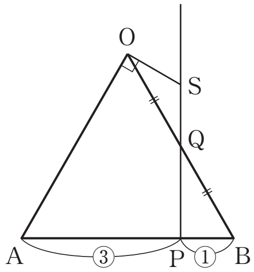
ここで $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ より

$\dfrac{1}{4}(1-t)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{t}{4}\right)=0$　　よって　$t=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$

このとき　$\overrightarrow{OS}=-\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}=-\dfrac{1}{6}(\vec{a}-2\vec{b})$　より

$|\overrightarrow{OS}|^2=\dfrac{1}{36}|\vec{a}-2\vec{b}|^2=\dfrac{1}{36}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\dfrac{3}{36}$

よって　$|\overrightarrow{OS}|=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}}$



［2］ $\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$ より $\vec{a}+2\vec{b}=-2\vec{c}$

よって　$|\vec{a}+2\vec{b}|=|2\vec{c}|$　つまり　$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|2\vec{c}|^2$

$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4|\vec{c}|^2$　　$1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=4$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot1^2-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{8}}$